Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Теоретическое занятие

Специальность 24.02.01 Производство летательных аппаратов

ОП 01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Тема 1.1 Комплексные числа

Преподаватель: Синишина И.В.

2022

Комплексные числа

Введение комплексных чисел связано с неразрешимостью в области вещественных чисел операции извлечения корня четной степени из отрицательных чисел.

Рассмотрим простейший случай: $x^2+1=0$ или $x^2=-1$. Число, квадрат которого равен –1, называют мнимой единицей и обозначают буквой i. Тогда $i^2=-1$ и $i=\sqrt{-1}$.

Определение: комплексным числом называется выражение вида: $z=a+b\,i$, a и b – действительные числа, i – мнимая единица. Запись комплексного числа в виде $z=a+ib$ называется алгебраической формой записи комплексного числа, где a действительная часть числа z, а b – мнимая часть числа z. Любое действительное число a содержится во множестве комплексных чисел, его можно записать так: $a=a+0\,i$. Числа 0, 1, i записываются соответственно в виде $0=0+0\,i$, $1=1+0\,i$, $i=0+1\,i$. Если $a=0$, комплексное число $z=a+b\,i$ обращается в чисто мнимое число $b\,i$. Комплексное число $\bar{z}=a-b\,i$ (отличается только знаком мнимой части) называется комплексносопряженным с числом $z=a+b\,i$. Комплексные числа $a+b\,i$ и $-a-b\,i$ называются противоположными.

Каков геометрический образ комплексного числа $z=a+b\,i$?

Комплексное число $z=a+b\,i$ изображают на координатной плоскости точкой с декартовыми координатами (a,b). Действительные числа a изображаются точками оси абсцисс. Чисто мнимые числа $i\,b$ – точками оси ординат.

Каждой точке плоскости с координатами (a,b) соответствует один и только один вектор с началом в точке О (0,0) и концом в точке А(a,b). Поэтому комплексное число $z=a+b\,i$ можно изобразить в виде

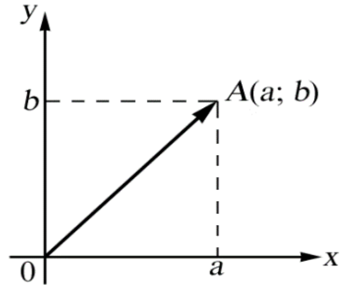

Рисунок 1.

вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{z}$ с началом в точке $z = 0$ и концом в точке (рис. 1).

Введение мнимой единицы позволяет нам теперь извлекать квадратные корни из отрицательных чисел.

Пример: найти корни уравнения $x^2 - 2x + 17 = 0$.

Решение. По известной формуле имеем

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-68}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{2 \pm 8\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 8i}{2} = 1 \pm 4i,$$

$x_1 = 1 + 4i, \quad x_2 = 1 - 4i.$

Ответ: $x_1 = 1 + 4i, \quad x_2 = 1 - 4i.$

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными тогда и только тогда, когда в отдельности равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единицы, т.е. $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$ если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Суммой и разностью двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$ (2)

Пример 1. Найти сумму $z_1 + z_2$, если $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -3 + 2i$

Решение. $z_1 + z_2 = (2 - i) + (-3 - 2i) = -1 + i$.

Ответ: $-1 + i$.

Пример 2. Найти разность $z_1 - z_2$, если $z_1 = 5 + 3i$ и $z_2 = 2 - i$.

Решение. $z_1 - z_2 = (5 + 3i) - (2 - i) = 3 + 4i$.

Ответ: $3 + 4i$.

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1\, i$ и $z_2 = a_2 + b_2\, i$ называется комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$ (3)

Пример 3. $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -3 + 2\, i$.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = (2 - i\ )(-3 + 2\, i\,) = -4 + 7i$.

Ответ: $-4 + 7i$.

При делении двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1\, i$ и $z_2 = a_2 + b_2\, i$ необходимо произвести дополнительное действие: умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример 4. Найти $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 3 - i$ и $z_2 = 2 + 3\, i$.

Решение. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - i}{2 + 3i} = \frac{(3 - i)(2 - 3i\ )}{(2 + 3i\,)(2 - 3i\ )} = \frac{3 - 11i}{13}$.

Ответ: $\frac{3 - 11i}{13}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Пусть комплексное число $z = a + b\, i$ изображено в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ с началом в точке O (0;0) и концом в точке A (a; b).

Модулем комплексного числа $z = a + b\, i$ называется длина вектора $\vec{z}$, которую можно найти по формуле:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1)$$

Обозначив модуль комплексного числа буквой r, получим:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2)$$

Аргументом комплексного числа называется угол φ, который образует вектор $\vec{z}$ с положительным направлением оси абсцисс (рис. 2).

Величину угла φ можно найти с помощью формул:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

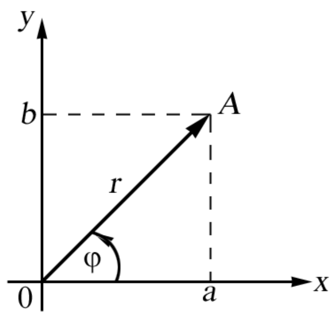

Рисунок 2.

Эта система имеет бесчисленное множество решений вида $\varphi + 2\pi k$, где k-любое целое число. Таким образом, любое комплексное число z имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Если k =0, то мы получим главное значение аргумента φ, которое и будем называть аргументом комплексного числа.

Из соотношения $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ следует:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi \qquad (3)$$

Если в запись комплексного числа z вместо a и b подставить эти значения, то получим: $z = a + b\,i = r\cos\varphi + r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Таким образом, мы получили новую форму записи комплексного числа:

$$z = a + b\,i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (4)$$

- тригонометрическая форма комплексного числа.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.

1) Находят модуль комплексного числа r по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Для нахождения φ сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка z.

3) Составляют уравнения $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ и по решению одного из них находят угол φ.

4) Записывают комплексное число в тригонометрической форме.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

При умножении двух или нескольких чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (5)$$

При делении двух комплексных чисел модуль числителя делится на модуль знаменателя, а аргумент знаменателя вычитается из аргумента числителя:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \qquad (6)$$

При возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль его возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени, т. е.

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad \text{где } n\in N \qquad (7)$$

Эта формула называется формулой Муавра.

Корень n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \text{ где } k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1 \quad (8)$$

Пример1.Записать комплексное число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. Чтобы записать комплексное число в тригонометрической форме нужно знать его модуль и аргумент, по формуле (1) находим

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Затем подсчитываем главное значение аргумента $z = 1 + i\sqrt{3}$. Вещественная и мнимая части данного комплексного числа положительны ($a = 1, b = \sqrt{3}$). Главное значение аргумента совпадает с $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$.

Тогда $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.[1]

[1] Дадаян А.А. Математика: учебник для среднего профессионального образования. – М.: ИНФРА-М, 2018.

Список использованной литературы

1. Бардушкин В.В., Прокофьев А.А. Математика. Элементы высшей математики: учебник для среднего профессионального образования: в 2 т. Т. 1. – М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 304 с.

2. Дадаян А.А. Математика: учебник для среднего профессионального образования. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 544 с.

3. Ледовская Е.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Практикум. – М.: МГАВТ, 2017. – 103 с.