Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Теоретическое занятие

Специальность: 24.02.01 Производство летательных аппаратов

ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Тема 2.1 Матрицы и их свойства. Действия над матрицами

Преподаватель: Синишина И.В.

2023

Действия над матрицами

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используют следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Для любого элемента, a_{ij} первый индекс **i** означает номер строки, а второй **j** −номер столбца. Запись «матрица B имеет размер mxn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер 2x3.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется квадратной. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы A (размера nxn) образуют главную диагональ. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется диагональной. Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали) равны 1, называется единичной. Квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется верхней (нижней) треугольной матрицей.

Сложение матриц[1]

Складывать можно матрицы только одинаковой размерности.

Суммой двух матриц A и B называется матрица C (той же размерности, что и матрицы A и B), элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

---

[1] Бардушкин В.В., Прокофьев В.В. Математика. Элементы высшей математики: учебник для СПО. – М.: ИНФРА-М, 2021.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}}_{C} \qquad (2)$$

Пример 1. Сложите матрицы A и B:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -1 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

Решение.

Согласно определению сложения матриц имеем:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -1 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+3 & 4+7 \\ -1+(-1) & 5+0{,}5 & 7+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 \\ -2 & 5{,}5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Данные матрицы A и B сложить невозможно, так как их размерность различна, точнее, матрица A имеет размерность 3 x 2, а матрица B – 2 x 2.

Умножение матрицы на число

Для того, чтобы умножить число k $(k \in R)$ на матрицу A нужно это число k умножить на каждый элемент матрицы A, в результате мы получаем матрицу той же размерности, что и матрица A:

$$k\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \cdots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Умножение матриц

Произведением матрицы A, имеющей размерность m x n, на матрицу B имеющей размерность n x p называется матрица C, имеющая размерность m x p, и элементы матрицы C определяются следующей формулой:

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}\text{, i=1,2, … , m, j=1,2, … , p} \qquad (4)$$

$$\underset{m\,x\,n}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \underset{n\,x\,p}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}} = \underset{n\,x\,p}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}} \quad (5)$$

Очень важное замечание: матрицу A можно умножить не на всякую матрицу B. Для того чтобы можно было перемножить матрицы A и B нужно, чтобы число строк матрицы B совпадало с числом столбцов матрицы A, а в результате произведения мы получаем матрицу, которая имеет столько строк, сколько матрица A и столько столбцов сколько матрица B.

Транспонирование матриц[2]

Транспортированием называют операцию, переводящую матрицу размерности m ×=n в матрицу размерности n ×m, делая столбцы исходной матрицы строками, а строки столбцами.

Определитель матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядка

Определителем (или детерминантом) матрицы A называется число, которое ставится в соответствие этой матрице и может быть вычислено по ее элементам. Обозначается определитель матрицы A символами:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы n×n называется определителем n–го порядка.

Количество строк (или столбцов) в определителе называется порядком определителя.

Правила вычисления определителей

Определителем матрицы первого порядка, будем считать само это число.

Определители матрицы второго порядка вычисляются по формуле:

---

[2] Дадаян А.А. Математика: учебник для среднего профессионального образования. – М.: ИНФРА-М, 2022.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример 1.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 1 \cdot 5 = -16 - 5 = -21$

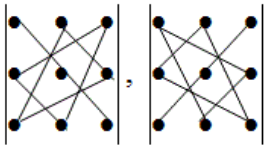
Определитель третьего порядка матрицы A вычисляется по формуле

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) -$$

$$-(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}) \ .$$

Правило треугольника

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



«+» «–»

Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком «плюс»; аналогично, для второго определителя соответствующие произведения берутся со знаком «минус», т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Список использованной литературы

1. Бардушкин В.В., Прокофьев В.В. Математика. Элементы высшей математики: учебник для СПО. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 304 с.

2. Дадаян А.А. Математика: учебник для среднего профессионального образования. – М.: ИНФРА-М, 2022. – 544 с.

3. Ледовская Е.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: практикум. – М.: МГАВТ, 2017. – 103 с.